

7 Gemeinsame Merkmale der Kegelschnitte

7.1 Analytische und geometrische Betrachtungen

In den drei vorigen Kapiteln haben wir jeden der drei Kegelschnittypen – Ellipse, Parabel und Hyperbel – für sich behandelt. Es gibt jedoch mehrere Eigenschaften, die für alle Arten von Kegelschnitten sehr ähnlich sind. Aus diesem Grund betrachten wir im folgenden keinen einzelnen Typ mehr, sondern alle drei gleichzeitig.

Satz 7.1: (Scheitelform der Kegelschnittsgleichung)

Ein Kegelschnitt, dessen einer Hauptscheitel im Koordinatenursprung liegt und dessen Brennpunkte auf der x_1 -Achse liegen, genügt der Gleichung:

$$(*) \quad x_2^2 = 2 \cdot p \cdot x_1 - (1 - \varepsilon^2) \cdot x_1^2 \quad \text{mit dem Parameter } p := \frac{b^2}{a}.$$

Beweis:

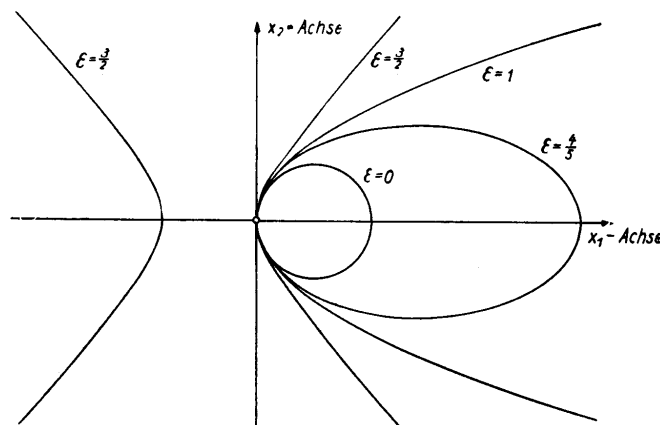


Abb. 7.1 [Pic]

In den Sätzen 4.12, 5.9 und 6.11 haben wir die Achsenformen der drei Kegelschnittgleichungen kennengelernt. Wir stellen nun die Gleichungen für den Fall auf, daß sich der eine Hauptscheitel im Koordinatenursprung befindet und die Brennpunkte

auf der x_1 -Achse liegen. Der Mittelpunkt der Ellipse liegt dann bei $(a|0)$, derjenige der Hyperbel bei $(-a|0)$. Die drei Gleichungen lauten dann:

$$\text{Ellipse: } \frac{(x_1 - a)^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

$$\text{Parabel: } x_2^2 = 2 \cdot p \cdot x_1$$

$$\text{Hyperbel: } \frac{(x_1 + a)^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

Diese Formeln lassen sich durch elementare Umformungen schnell in die gewünschte Form bringen, wenn man die bekannten Definitionen für die linearen Exzentrizitäten $e^2 = a^2 - b^2$ (Ellipse), $e^2 = a^2 + b^2$ (Hyperbel), die numerische Exzentrizität $\varepsilon := \frac{e}{a}$

und den Parameter $p := \frac{b^2}{a}$ verwendet.

Mit $\varepsilon = 0$ für einen Kreis, $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} < 1$ für eine Ellipse, $\varepsilon = 1$ für

eine Parabel und $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} > 1$ für eine Hyperbel folgt die Behauptung.

◇

Bezeichnung der Kegelschnitte:

Die Gleichung (*) aus Satz 7.1 erklärt auch die von Apollonius eingeführten Namen für die Kegelschnittarten, welche ursprünglich Fachausdrücke aus der Flächenanlehnungslehre waren:

Bei den verschiedenen Typen ist x_2^2 kleiner (Ellipse), gleich (Parabel) oder größer (Hyperbel) als $2 \cdot p \cdot x_1$, also benannte er sie folgendermaßen:

Bezeichnungen 7.2:

Ellipse:	ἐλλείπειν	= mangeln
Parabel:	παράλλειν	= gleichkommen
Hyperbel:	ὑπερβάλλειν	= übertreffen

In Kapitel 4 haben wir die numerische Exzentrizität speziell für die Ellipse, in Kapitel 6 speziell für die Hyperbel eingeführt. Man kann jedoch auch sie für alle Kegelschnittarten gemeinsam definieren:

Satz 7.3:

Sei φ der halbe Öffnungswinkel eines Doppelkegels; sei E eine Ebene, die den Doppelkegel im Winkel ω zur Kegelachse schneidet.

Dann gilt für die numerische Exzentrizität: $\varepsilon = \frac{\cos\omega}{\cos\varphi}$.

Beweis:

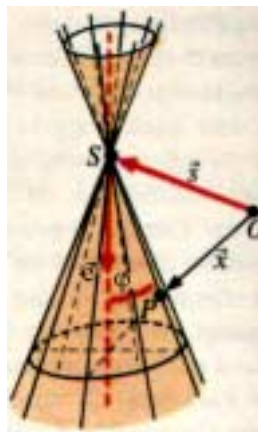


Abb. 7.2 [ReSo]

Wir betrachten einen Doppelkegel mit Spitze S und halbem Öffnungswinkel φ . Der Einheitsvektor \vec{e} zeige in Achsenrichtung. \vec{s} sei der Vektor vom Nullpunkt zur Kegelspitze, \vec{x} der Vektor vom Nullpunkt zu einem beliebigen Kegelpunkt P . Dann gilt für diesen Doppelkegel:

$$((\vec{x} - \vec{s}) \cdot \vec{e})^2 = (\vec{x} - \vec{s})^2 \cdot \cos^2\varphi \quad (*).$$

Nun setzen wir o.B.d.A. voraus:

- Die den Doppelkegel schneidende Ebene E liege in der x_1x_2 -Ebene-
- Die x_1 -Achse sei die Symmetrieachse des entstandenen Kegelschnitts. Das heißt die x_1 -Achse bilde mit der Kegelachse eine Ebene, die senkrecht zur Schnittebene ist.

- Der Koordinatenursprung O sei derjenige Punkt des Kegelschnitts, der von der Kegelspitze S den kleinsten Abstand hat.
- Der positive Teil der x_1 -Achse enthalte den Schnittpunkt der Ebene mit der Kegelachse.

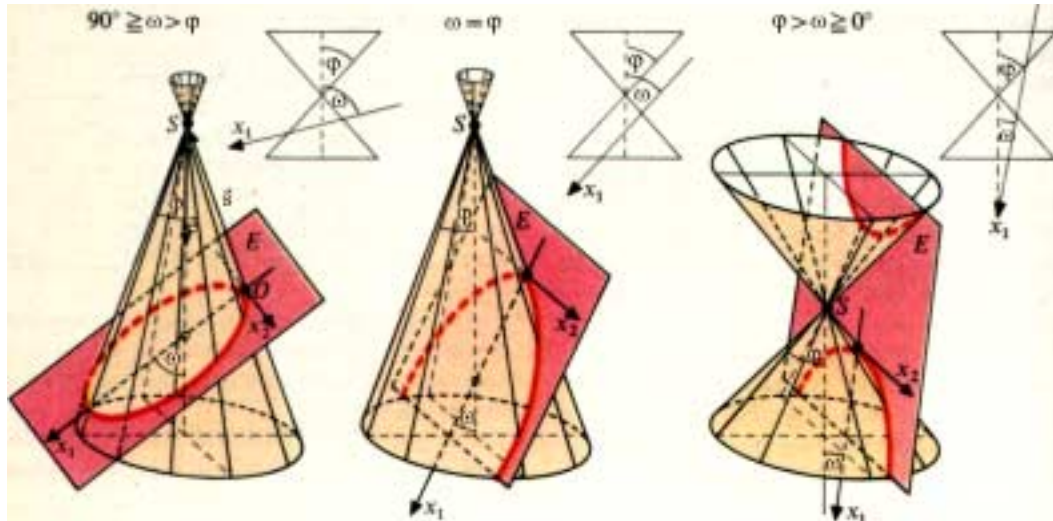


Abb. 7.3 [ReSo*]

Es gilt: $\vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ 0 \\ s_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ 0 \\ e_3 \end{pmatrix}$ sowie $\vec{s} \cdot \vec{e} = |\vec{s}| \cdot \cos(\pi - \varphi) = -|\vec{s}| \cdot \cos \varphi$.

Nun können wir (*) umformen:

$$\begin{aligned}
 (\vec{x} \cdot \vec{e})^2 - 2 \cdot (\vec{x} \cdot \vec{e}) \cdot (\vec{s} \cdot \vec{e}) + (\vec{s} \cdot \vec{e})^2 &= (\vec{x}^2 - 2 \cdot \vec{x} \cdot \vec{s} + \vec{s}^2) \cdot \cos^2 \varphi \\
 \Leftrightarrow (\vec{x} \cdot \vec{e})^2 + 2 \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \varphi \cdot (\vec{x} \cdot \vec{e}) + |\vec{s}|^2 \cdot \cos^2 \varphi &= \cos^2 \varphi \cdot \vec{x}^2 - 2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \vec{x} \cdot \vec{s} + \cos^2 \varphi \cdot \vec{s}^2 \\
 \Leftrightarrow (\vec{x} \cdot \vec{e})^2 + 2 \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \varphi \cdot (\vec{x} \cdot \vec{e}) &= \cos^2 \varphi \cdot \vec{x}^2 - 2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot (\vec{x} \cdot \vec{s})
 \end{aligned}$$

Der Vektor \vec{x} vom Nullpunkt zu einem Kegelschnittspunkt lässt sich schreiben als:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Somit:}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ 0 \\ e_3 \end{pmatrix} \right)^2 + 2 \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \varphi \cdot \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ 0 \\ e_3 \end{pmatrix} \right) &= \cos^2 \varphi \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}^2 - 2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ 0 \\ s_3 \end{pmatrix} \right) \\
 \Leftrightarrow x_1^2 \cdot e_1^2 + 2 \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \varphi \cdot x_1 \cdot e_1 &= \cos^2 \varphi \cdot x_1^2 + \cos^2 \varphi \cdot x_2^2 - 2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot x_1 \cdot s_1 \\
 \Leftrightarrow \cos^2 \varphi \cdot x_2^2 &= 2 \cdot (|\vec{s}| \cdot \cos \varphi \cdot e_1 + \cos^2 \varphi \cdot s_1) \cdot x_1 - (\cos^2 \varphi - e_1^2) \cdot x_1^2
 \end{aligned}$$

Mit $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ folgt $\cos\varphi \neq 0$, also:

$$x_2^2 = 2 \cdot \left(\frac{|\vec{s}| \cdot e_1}{\cos\varphi} + s_1 \right) \cdot x_1 - \left(1 - \frac{e_1^2}{\cos^2\varphi} \right) \cdot x_1^2$$

Nun gilt aber mit Abbildung 7.3: $e_1 = \cos\omega$. Somit:

$$x_2^2 = 2 \cdot \left(|\vec{s}| \cdot \frac{\cos\omega}{\cos\varphi} + s_1 \right) \cdot x_1 - \left(1 - \left(\frac{\cos\omega}{\cos\varphi} \right)^2 \right) \cdot x_1^2 (**).$$

Nun vergleichen wir (**) mit der Kegelschnittgleichung aus Satz 7.1:

$$x_2^2 = 2 \cdot p \cdot x_1 - (1 - \varepsilon^2) \cdot x_1^2.$$

Hieraus erhalten wir für den Parameter p die allgemeine Definition

$$p := |\vec{s}| \cdot \frac{\cos\omega}{\cos\varphi} + s_1 \text{ und für die numerische Exzentrizität folgt: } \varepsilon = \frac{\cos\omega}{\cos\varphi}. \quad \diamond$$

Korollar 7.4:

Die numerische Exzentrizität ε nimmt folgende Werte an:

- $\varepsilon = 0$ für Kreise,
- $0 < \varepsilon < 1$ für Ellipsen,
- $\varepsilon = 1$ für Parabeln,
- $\varepsilon > 1$ für Hyperbeln.

Beweis:

Dies folgt direkt aus Satz 7.3 unter Verwendung von Korollar 3.3:

- Kreis: $\omega = 90^\circ \Rightarrow \cos\omega = 0 \Rightarrow \varepsilon = 0$.
- Ellipse: $\varphi < \omega \Rightarrow \cos\varphi > \cos\omega \Rightarrow 0 < \varepsilon < 1$.
- Parabel: $\varphi = \omega \Rightarrow \cos\varphi = \cos\omega \Rightarrow \varepsilon = 1$.
- Hyperbel: $\varphi > \omega \Rightarrow \cos\varphi < \cos\omega \Rightarrow \varepsilon > 1$. \diamond

Satz 7.5: (Konfokale Kegelschnitte)

- a) Sind eine Ellipse und eine Hyperbel **konfokal** (d.h. sie haben die gleichen Brennpunkte), so stehen sie in ihren Schnittpunkten senkrecht aufeinander.
- b) Zwei sich schneidende konfokale und **koaxiale** (d.h. mit gleichen Achsen) Parabeln sind in den Schnittpunkten zueinander senkrecht.

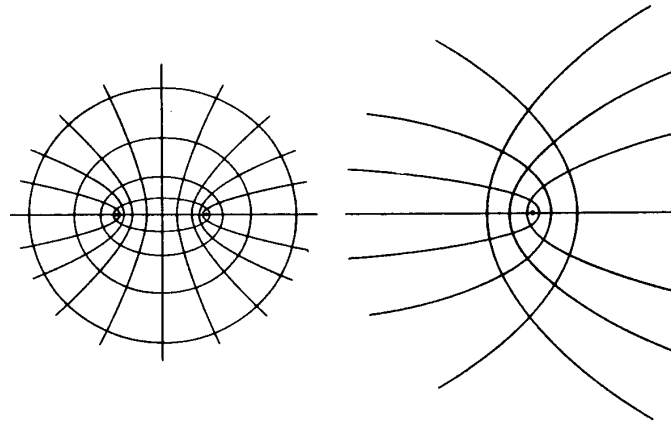


Abb. 7.4 [Ogi]

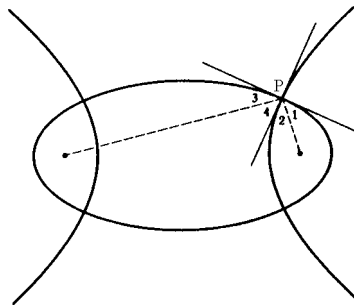
Beweis:

Abb. 7.5a [Ogi]

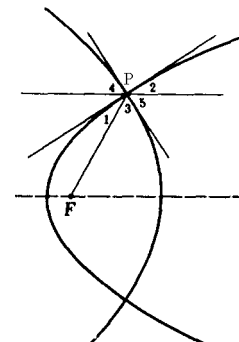


Abb. 7.5b [Ogi]

- a) Wir betrachten einen beliebigen Schnittpunkt P einer Hyperbel mit einer Ellipse, deren Brennpunkte identisch sind (siehe Abbildung 7.5a):

Nach Satz 4.8 gilt für die Ellipsentangente an P: $\angle 1 = \angle 3$; Satz 6.7 liefert als Bedingung für die Hyperbeltangente an P: $\angle 2 = \angle 4$.

Zusammen: $\angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 4$, was unsere Behauptung beweist.

- b) In Abbildung 7.5b betrachten wir den Schnittpunkt P zweier konfokaler und ko-axialer Parabeln:

Mit Satz 5.6 und der Reflexionseigenschaft aus Abschnitt 5.3b folgt für die eine Parabel: $\angle 1 = \angle 2$, für die andere: $\angle 3 = \angle 4$. Außerdem gilt: $\angle 4 = \angle 5$ (Scheitelwinkel).

Insgesamt: $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 5$ mit $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 5 = 180^\circ$. Also sind auch in diesem Fall die beiden Tangenten zueinander orthogonal. \diamond

Gleichung zweiten Grades:

Bei der Herleitung der Kegelschnittsgleichungen in Achsenform (siehe 4.12, 5.9 und 6.11) haben wir als Zwischenschritt folgende Gleichungen erhalten:

$$\text{Ellipse: } b^2 \cdot x_1^2 + a^2 \cdot x_2^2 = a^2 \cdot b^2$$

$$\text{Parabel: } -2 \cdot p \cdot x_1 + x_2^2 = 0$$

$$\text{Hyperbel: } b^2 \cdot x_1^2 - a^2 \cdot x_2^2 = a^2 \cdot b^2$$

Man sieht, daß dies lediglich Spezialfälle einer sehr viel allgemeineren Gleichung der Form:

$$a_{11} \cdot x_1^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + a_{22} \cdot x_2^2 + 2 \cdot a_{01} \cdot x_1 + 2 \cdot a_{02} \cdot x_2 + a_{00} = 0 \text{ mit } a_{ij} \in \mathbf{R}$$

sind. Dieser Typ heißt **allgemeine Gleichung 2. Grades mit zwei Variablen**.

Vektoriell geschrieben:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} a_{01} & a_{02} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + a_{00} = 0$$

Das sogenannte gemischtquadratische Glied $2 \cdot a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2$ tritt nur dann auf, wenn die Koordinatenachsen nicht parallel zu den Achsen der Kegelschnitte sind. Außer bei der Behandlung von gleichseitigen Hyperbeln haben wir dies jedoch immer vorausgesetzt, können die Gleichung also vereinfachen:

$$a_{11} \cdot x_1^2 + a_{22} \cdot x_2^2 + 2 \cdot a_{01} \cdot x_1 + 2 \cdot a_{02} \cdot x_2 + a_{00} = 0 \quad (*)$$

Welche Bedingungen müssen nun die Koeffizienten, $a_{11}, a_{22}, a_{01}, a_{02}, a_{00} \in \mathbf{R}$ erfüllen, damit wir einen bestimmten Kegelschnitttyp erhalten? Elementare Überlegungen führen zu folgendem Ergebnis:

Wenn a_{11} und a_{22} nicht beide gleichzeitig gleich 0 sind, dann gilt:

- $a_{11} \cdot a_{22} > 0 \Leftrightarrow (*)$ stellt eine Ellipse dar.
- $a_{11} \cdot a_{22} = 0 \Leftrightarrow (*)$ stellt eine Parabel dar.
- $a_{11} \cdot a_{22} < 0 \Leftrightarrow (*)$ stellt eine Hyperbel dar.

Dabei kann der Kegelschnitt durchaus entartet oder sogar imaginär sein.

7.2 Projektionen

An dieser Stelle möchte ich zwei (äquivalente) Arten beschreiben, wie man sich die Entstehung der Kegelschnitte dynamisch veranschaulichen kann.

1. Zentralprojektion eines Kreises auf verschiedene Ebenen:

Definition 7.6: (räumliche Zentralprojektion)

Gegeben seien zwei verschiedene, nicht parallele Ebenen E und E' sowie ein Punkt S , genannt **Projektionszentrum**, der auf keiner der beiden Ebenen liegt.

Dann ordnet eine räumliche **Zentralprojektion** einem Punkt $P \in E$ genau einen Punkt $P' \in E'$ derart zu, daß S , P und P' auf einer gemeinsamen Geraden g liegen.

Man nennt dann E die **Objektebene**, E' die **Bildebene**, g die **Projektionsgerade** und die Schnittgerade a von E und E' die **Projektionsachse**.

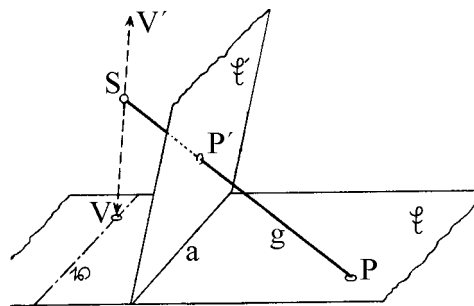


Abb. 7.6 [GüSt*]

Anmerkungen:

- Um Verwechslungen mit dem Symbol für Ellipsen (E) zu vermeiden, werde ich in diesem Abschnitt Ebenen mit dem deutschen Buchstaben E bezeichnen.
- Das einfachste anschauliche Beispiel für eine Zentralprojektion ist der Schatten eines Lampenschirms einer (angenähert) punktförmigen Lichtquelle.
- Es ist anschaulich klar, daß jedem Punkt der Objektebene genau ein Punkt der Bildebene zugeordnet wird.

- Für einen Punkt V auf der sogenannten **Verschwindungsgeraden** v , welche die Schnittgerade der Objektebene E und der zu E' parallelen, durch S gehenden Ebene ist, gilt: Das Bild von V ist der unendlich ferne Schnittpunkt der Geraden VS mit der Bildebene E' .

Wir betrachten nunmehr die räumliche Zentralprojektion eines Kreises:

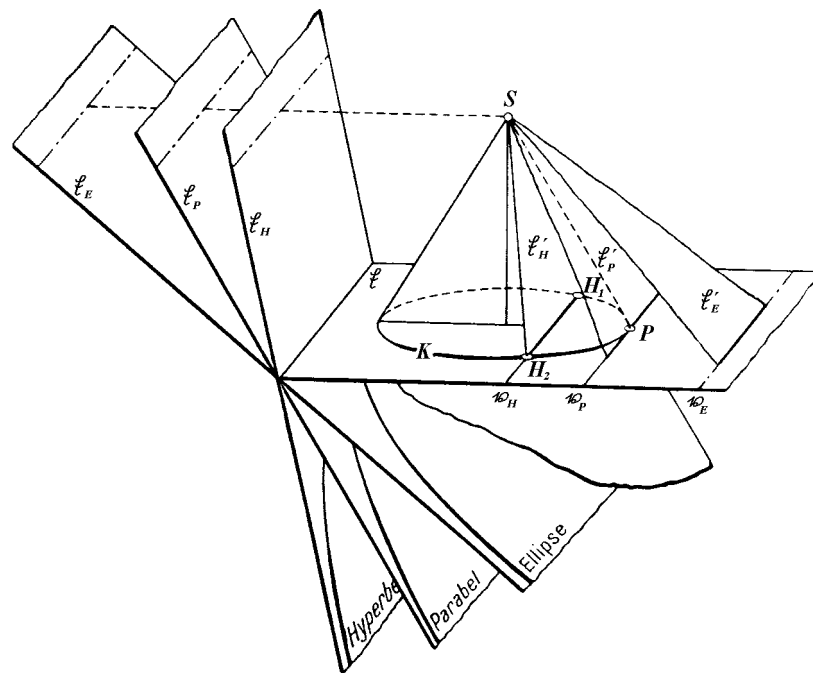


Abb. 7.7 [GüSt*]

Gegeben sei ein gerader Kreiskegel. Dabei sei der Kreis K die in der Objektebene E liegende Grundfläche, S die Spitze des Kegels. Wir betrachten nun die Projektion mit Zentrum S des Kreises auf drei verschiedene Bildebenen E_E , E_P und E_H , die wie in der Abbildung angegeben liegen sollen. Der Kreis wird dann als eine Ellipse auf E_E , als eine Parabel auf E_P und als ein Hyperbelast auf E_H projiziert.

Zur Erklärung betrachten wir die Ebenen E'_E , E'_P bzw. E'_H , die parallel zu E_E , E_P bzw. E_H sind und die den Punkt S beinhalten. Diese Ebenen schneiden die Objektebene E in den Verschwindungsgeraden v_E , v_P bzw. v_H . Die drei Geraden haben mit dem Kreis K keinen, einen (P) bzw. zwei (H_1 , H_2) Punkte gemeinsam. Die Kreispunkte P bzw. H_1 und H_2 haben bei Zentralprojektion mit Zentrum S keine Bilder in

den Ebenen E_P bzw. E_H , da sie in hierzu parallelen Ebenen liegen. Sie werden also in unendlich ferne Punkte abgebildet: Die Ellipse besitzt demnach keinen, die Parabel einen (doppelten) und die Hyperbel sogar zwei unendlich ferne Punkte.

Man sieht, daß jeder Kegelschnitt als projektives Bild eines anderen dargestellt werden kann. Üblicherweise behandeln wir deshalb in der projektiven Geometrie nur Ellipsen, wie wir in Kapitel 8 sehen werden.

2. Zentralprojektion eines Kreises mit veränderlichem Zentrum:

Die zweite dynamische Methode funktioniert folgendermaßen:

Sei K ein Kreis in der x_2x_3 -Ebene (= Objektebene) mit festem Radius r und Mittelpunkt $M = (0|0|r)$. Die x_1x_2 -Ebene sei die Bildebene. Sei $S = (-1|0|h)$ das Projektionszentrum, dessen x_3 -Koordinate beliebig gewählt werden kann. Der Punkt $P = (0|p_2|p_3)$ des Kreises werde dabei in den Punkt $Q = (q_1|q_2|0)$ projiziert.

Wir betrachten also jetzt nicht mehr verschiedene Bildebenen, sondern die Zentralprojektion eines Kreises mit unterschiedlichen Projektionszentren. Für verschiedene Positionen des Zentrums erhalten wir als Bilder die Kegelschnittarten, wie wir mit folgendem Satz zeigen werden.

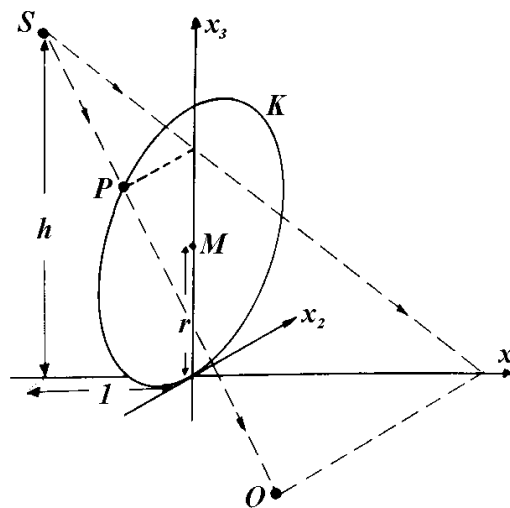


Abb. 7.8 [Scheil*]

Satz 7.7:

Ein Kegelschnitt ist gegeben durch die Gleichung:

$$x_2^2 = 2 \cdot r \cdot h \cdot x_1 - h \cdot (h - 2 \cdot r) \cdot x_1^2.$$

Dabei handelt es sich für: $\begin{cases} h > 2r \text{ um eine Ellipse.} \\ h = 2r \text{ um eine Parabel.} \\ h < 2r \text{ um eine Hyperbel.} \end{cases}$

Beweis:

Betrachten wir Abbildung 7.8, so erkennen wir folgende Zusammenhänge für die x_1x_3 - bzw. x_1x_2 -Ebene:

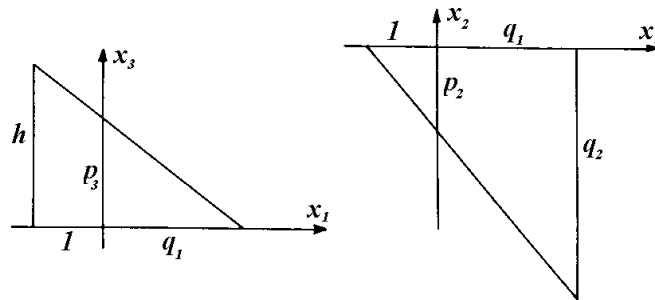


Abb. 7.9 [Scheil*]

Mit Hilfe des Strahlensatzes erhalten wir folgende Bedingungen:

$$\frac{q_1}{q_1 + 1} = \frac{p_3}{h} \text{ und } \frac{1}{q_1 + 1} = \frac{p_2}{q_2}, \text{ somit } p_3 = \frac{h \cdot q_1}{q_1 + 1} \text{ und } p_2 = \frac{q_2}{q_1 + 1}.$$

Der Kreis K wird durch die Gleichung $p_2^2 + (p_3 - r)^2 = r^2$ dargestellt.

$$\text{Daher erhält man: } \left(\frac{q_2}{q_1 + 1} \right)^2 + \left(\frac{h \cdot q_1}{q_1 + 1} - r \right)^2 = r^2, \text{ also:}$$

$$q_2^2 = 2 \cdot r \cdot h \cdot q_1 - h \cdot (h - 2 \cdot r) \cdot q_1^2.$$

Setzen wir nun zur Verallgemeinerung $q_1 = x_1$ und $q_2 = x_2$, so erhalten wir als allgemeine Gleichung für alle Kegelschnitte:

$$x_2^2 = 2 \cdot r \cdot h \cdot x_1 - h \cdot (h - 2 \cdot r) \cdot x_1^2.$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit der aus Satz 7.1 bekannten Scheitelform $x_2^2 = 2 \cdot p \cdot x_1 - (1 - \varepsilon^2) \cdot x_1^2$, so stellen wir fest, daß wir für unterschiedliche Werte des Faktors $h \cdot (h - 2 \cdot r)$ verschiedene Kegelschnittypen erhalten:

- $h \cdot (h - 2 \cdot r) > 0 \Leftrightarrow h > 2 \cdot r \Rightarrow$ Ellipse
- $h \cdot (h - 2 \cdot r) = 0 \Leftrightarrow h = 2 \cdot r \Rightarrow$ Parabel
- $h \cdot (h - 2 \cdot r) < 0 \Leftrightarrow h < 2 \cdot r \Rightarrow$ Hyperbel

Im ersten Fall liegt der x_3 -Wert des Projektionszentrum außerhalb des Kreises, im zweiten Fall liegt er auf dem Kreisrand, im dritten Fall liegt er im Kreisinnern, wie es Abbildung 7.10 verdeutlicht. \diamond

Ein Kegelschnitt ist also darstellbar als Bild eines Kreises bei einer Zentralprojektion.

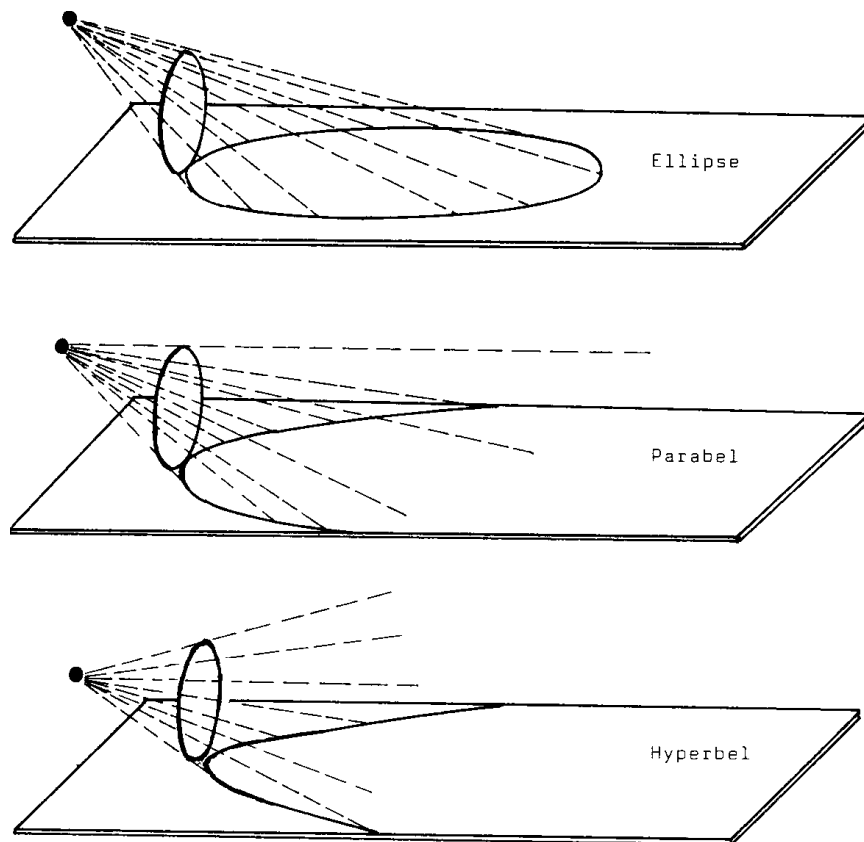


Abb. 7.10 [Schei2]