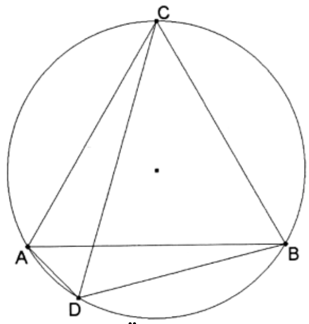
# Geometrie: I. Vorkenntnisse – Übungen

AG, SWA

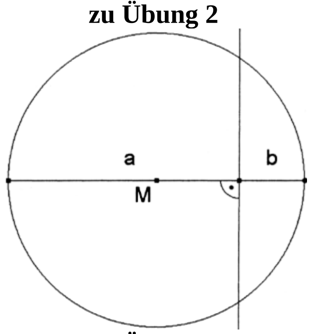
***Übung 1:***
Konstruiere ein Dreieck mit Hilfe folgender Angaben: Grundseite $c$ = 10 cm, Höhe $h$ = 4 cm, Winkel $\gamma = 60°$. Ist die Konstruktion eindeutig? Kann man das Dreieck auch noch konstruieren, wenn die Höhe 11 cm betragen soll? Für welche Höhe wäre die Konstruktion eindeutig?



**zu Übung 2**

***Übung2:***
Es sei $ABC$ ein gleichseitiges Dreieck und $k$ sein Umkreis. Der Punkt $D$ liege auf $k$ zwischen $A$ und $B$. Man zeige: $\overline{DA} + \overline{DB} = \overline{DC}$.

***Übung 3:***
Zeige, dass in einem regelmäßigen Neuneck die Differenz der Länge der längsten und der kürzesten Diagonalen gerade die Seitenlänge des Neunecks ist!

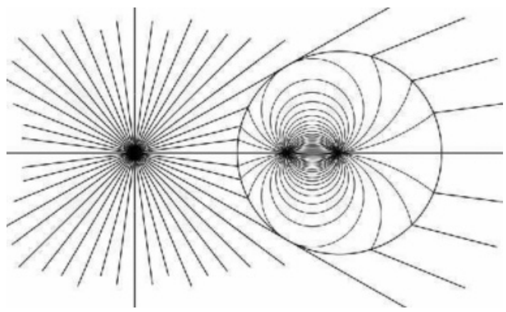


**zu Übung 4**

***Übung 4:***
Beweise auf geometrische Art und Weise die Ungleichung:

$$\frac{1}{2} \cdot (a+b) \geq \sqrt{a \cdot b}\,.$$

***Übung 5:***
Die folgende Konstruktion nennt man „Spiegelung am Kreis“:
Sei $k$ ein Kreis mit dem Radius $r$ um den Mittelpunkt $M$. Dann ist das „Bild“ $A'$ eines Punktes $A$ unter dieser Spiegelung der Punkt, der auf der Verbindungsgerade $AM$ liegt und für dessen Abstand $\overline{A'M}$ vom Kreismittelpunkt gilt: $\overline{AM} \cdot \overline{A'M} = r^2$.



Das Bild einer Kurve erhält man, indem man jeden Punkt der Kurve am Kreis spiegelt. Zeige, dass das Bild eins Kreises, der außerhalb des Kreises $k$ liegt, wieder ein Kreis ist!

***Übung 6:***
Wie kann man von einem Punkt $A$ die Tangenten an einen gegebenen Kreis konstruieren?

***Übung7:***
Zwei Punkte $A$ und $B$ liegen im Innern eines Kreises $k$. Man finde ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Eckpunkte auf $k$ liegen, so dass $A$ und $B$ auf den Katheten dieses Dreiecks liegen. Ist die Konstruktion eindeutig? Ist es immer möglich, ein solches Dreieck zu finden?

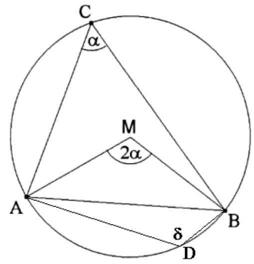
***Übung 8:***
Gegeben sind die drei Punkte $A$, $B$ und $C$ auf einem Kreis. Gesucht ist ein vierter Punkt $D$ auf diesem Kreis, so dass das sich ergebende Viereck $ABCD$ einen Inkreis hat.

***Übung 9:***
Zeige, dass das bei einer Kreisspiegelung entstehende Bild einer Geraden, die vollständig außerhalb des Kreises $k$ verläuft, ein Kreis ist, der durch den Mittelpunkt $M$ von $k$ geht!

# Geometrie: I. Vorkenntnisse – Sätze

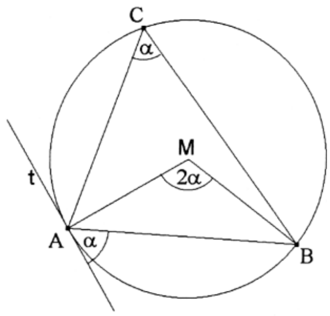
AG, SWA

*Satz 1:* **Umfangswinkelsatz** (oder Peripheriewinkelsatz)
Im Kreis mit dem Mittelpunkt *M* gilt: Ist β der Mittelpunktswinkel $\angle AMB$ über dem Bogen $\overline{AB}$, so ist jeder Umfangswinkel über $\overline{AB}$ (auf *derselben* Seite von $\overline{AB}$ wie *M*) halb so groß wie β. Für $\alpha = \angle ACB$ gilt also $\beta = 2\cdot\alpha$.
Die Größe aller Umfangswinkel δ über $\overline{AB}$ (auf *der anderen* Seite von $\overline{AB}$ wie *M*) beträgt: $\delta = 180° - \alpha$.



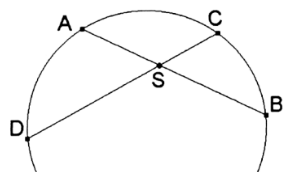

*Satz 2:* Umkehrung des Umfangswinkelsatzes
Alle Punkte, von denen aus eine bestimmte Strecke $\overline{AB}$ unter einem Winkel α erscheint, liegen auf einem Kreis.

*Satz 3:* **Sehnen-Tangenten-Winkel-Satz** *(Bild rechts)*
Ist *t* die Tangente an den Kreis *k* im Punkt *A*, so ist der Winkel, den *t* mit der Strecke $\overline{AB}$ bildet, gleich dem Umfangswinkel über dem Bogen $\overline{AB}$.

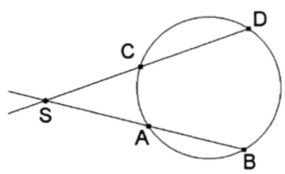



*Satz 4:*
Sei $k_\alpha$ der Kreis über $\overline{AB}$ zu dem Umfangswinkel α. Dann liegt *P* innerhalb des Kreises, wenn $\angle APB > \alpha$ ist und außerhalb des Kreises wenn $\angle APB < \alpha$ ist.

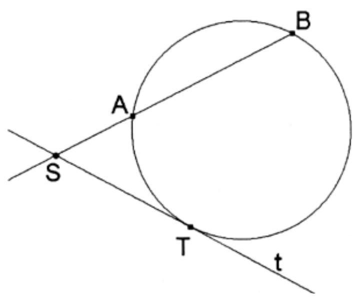
*Satz 5:* **Sehnen-Satz**
Die beiden Sehnen $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ schneiden sich innerhalb des Kreises im Punkt *S*. Dann ist das Produkt der Sehnenabschnitte für beide Sehnen gleich groß:
$\overline{SA}\cdot\overline{SB} = \overline{SC}\cdot\overline{SD}$.




*Satz 6:* **Sekanten-Satz**
Die beiden Sekanten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ schneiden sich außerhalb des Kreises im Punkt *S*. Dann ist das Produkt der Sekantenabschnitte für beide Sekanten gleich groß:
$\overline{SA}\cdot\overline{SB} = \overline{SC}\cdot\overline{SD}$.




*Satz 7:* **Sekanten-Tangenten-Satz** *(Bild rechts)*
Eine Sekante $\overline{AB}$ und eine Tangente an den Kreispunkt *T* schneiden sich außerhalb des Kreises im Punkt *S*. Dann gilt: $\overline{ST}^2 = \overline{SA}\cdot\overline{SB}$.



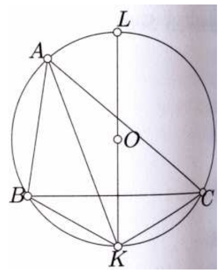

*Satz 8:* **Satz des Thales**
Ist α der Umfangswinkel über einem Durchmesser, so ist α ein rechter Winkel.

*Satz 10:* **Sehnenviereck**
Ein Viereck ist genau dann ein Sehnenviereck (d.h. es besitzt genau dann einen Umkreis), wenn die Summen der gegenüberliegenden Winkel 180° betragen, d.h. $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$.

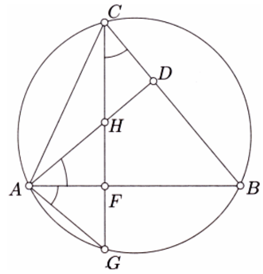
*Satz 11:* **Tangentenviereck**
Bei einem konvexen Viereck handelt es sich genau dann um ein Tangentenviereck (d.h. es besitzt genau dann einen Inkreis), wenn die Summen der gegenüberliegenden Seiten gleich groß sind, d.h. $a + c = b + d$.

# Geometrie: II. Kreise – Sätze

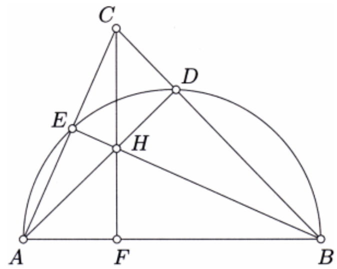
*Satz 1:*
In jedem Dreieck schneiden die Mittelsenkrechten die Winkelhalbierenden der ihnen gegenüberliegenden Winkel auf dem Umkreis.



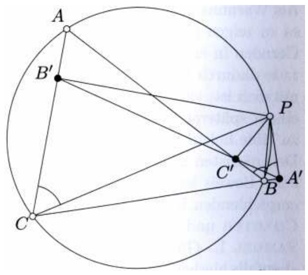

*Satz 2:*
Spiegelt man den Höhenschnittpunkt an einer Dreiecksseite, so erhält man einen Punkt auf dem Umkreis.



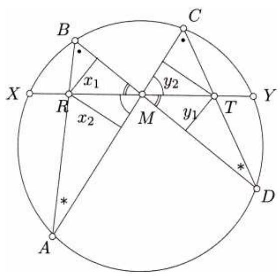

*Satz 3:*
Die Produkte der beiden Abschnitte, in welche jede Höhenlinie eines Dreiecks durch den Höhenschnittpunkt eines Dreiecks geteilt wird, sind bei allen drei Höhen desselben Dreiecks gleich groß.




*Satz 4:* **Simson-Gerade**
Es sei $P$ ein von den Ecken $A$, $B$ und $C$ verschiedener Punkt auf dem Umkreis des Dreiecks $ABC$. Die Fußpunkte der Lote von $P$ auf die Seiten $a$, $b$ und $c$ seien $A'$, $B'$ und $C'$.
Dann liegen die Punkte $A'$, $B'$ und $C'$ auf einer gemeinsamen Geraden, der sog. Simson-(Wallace-)Gerade.

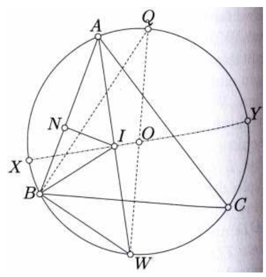



*Satz 5:*
Die Diagonalen $AC$ und $BD$ des Sehnenvierecks $ABCD$ mögen sich im Mittelpunkt $M$ einer Sehne $\overline{XY}$ schneiden. Bezeichnet man die Schnittpunkte der Seiten $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ mit der Sehne $\overline{XY}$ als $R$, $T$, so wird $M$ auch der Mittelpunkt der Strecke $\overline{RT}$ sein.



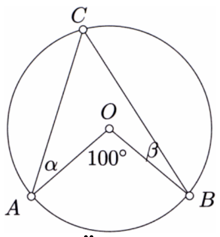

*Satz 6:*
Bezeichnet man den Mittelpunkt des Umkreises eines Dreiecks mit $O$, seinen Radius mit $R$, ferner das Zentrum seines Inkreises mit $I$, dessen Radius mit $r$, so besteht der Zusammenhang:

$$\overline{OI}^2 = R\cdot(R-2r)$$



# Geometrie: II. Kreise – Übungen

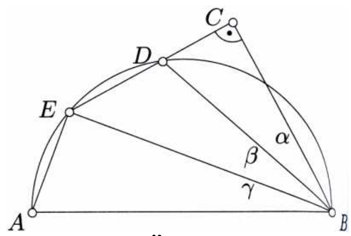
AG, SWA




***Zu Übung 1***

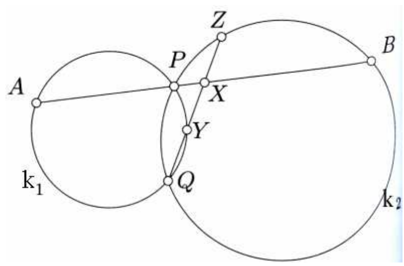
***Übung 1:***
Bestimme die Winkelsumme α + β in der links abgebildeten Figur.

***Übung 2:***
In der rechten Figur gilt: $\left|\overline{AE}\right| = \left|\overline{ED}\right|$ und α = 20°.
Der Punkt *D* liegt auf $\overline{EC}$. Berechne β und γ!

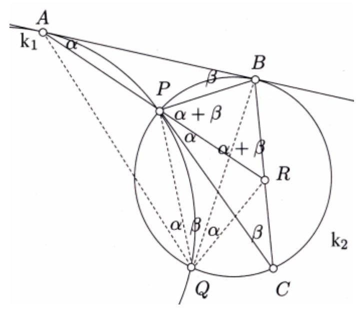



***Zu Übung 2***

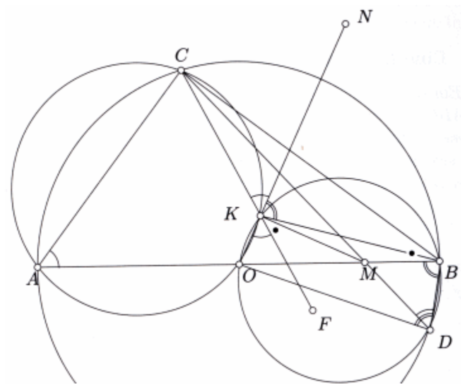
***Übung 3:***
Zwei Kreise $k_1$ und $k_2$ schneiden sich in *P* und *Q*. Eine Gerade durch *P* möge $k_1$ und $k_2$ wiederum in *A* und *B* schneiden. Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ heiße *X*. Die Gerade durch *Q* und *X* schneide $k_1$ in *Y* und $k_2$ in *Z*.
Beweise, dass *X* auch der Mittelpunkt von $\overline{YZ}$ sein wird.



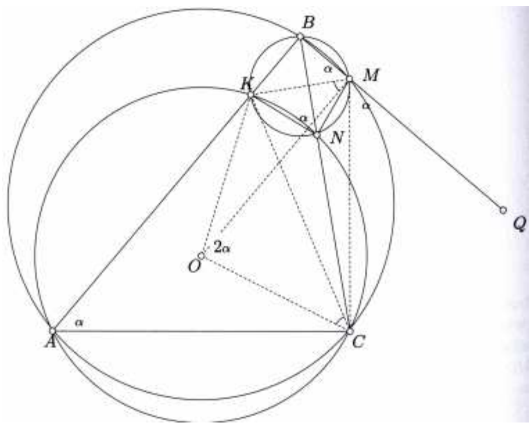

***Übung 4:***
Seien $k_1$ und $k_2$ zwei Kreise, die sich in *P* und *Q* schneiden. Diejenige gemeinsame Tangente von $k_1$ und $k_2$, die näher an *P* liegt, berühre $k_1$ in *A* und $k_2$ in *B*. Die Tangente an $k_1$ durch *P* treffe $k_2$ in *C* (verschieden von *P*) und die Verlängerung von *AP* treffe *BC* in *R*.
Beweise, dass der Umkreis des Dreiecks *PQR* die Geraden *BP* und *BR* berührt.




***Übung 5:***
Sei *AB* ein Durchmesser eines Kreises um *O*. Die Sehne *CD* treffe *AB* in *M*. Der von *O* verschiedene Durchschnittspunkt der Umkreise der Dreiecke *AOC*, *BOD* heiße *K*.
Beweise, dass der Winkle ∠*OKM* ein rechter ist.



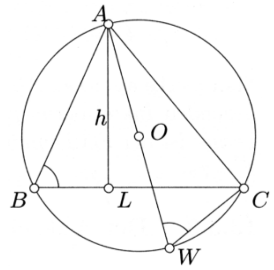

***Übung 6:***
Ein Kreis mit Mittelpunkt *O* geht durch die Eckpunkte *A* und *C* eines Dreiecks *ABC* und schneidet die Strecken *AB* und *BC* ein weiteres Mal in den verschiedenen Punkten *K* und *N*. Die Umkreise der Dreiecke *ABC* und *KBN* schneiden sich in genau zwei verschiedenen Punkten *B* und *M*.
Beweise, dass der Winkel ∠*BMO* ein rechter ist.



# Geometrie: III. Strecken – Sätze

AG, SWA

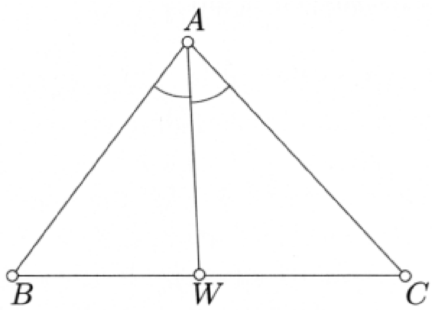
*Satz 1:*
Multipliziert man den vierfachen Umkreisradius eines Dreiecks mit seiner Fläche, so erhält man das Produkt der drei Seitenlängen: $4RF = abc$.

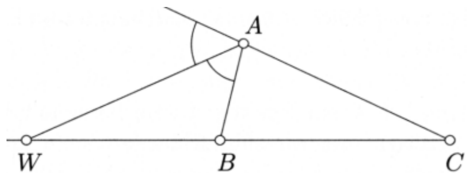



*Satz 2:* **Flächenformel des Heron**
Der Flächeninhalt eines beliebigen Dreiecks beträgt: $F = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$.

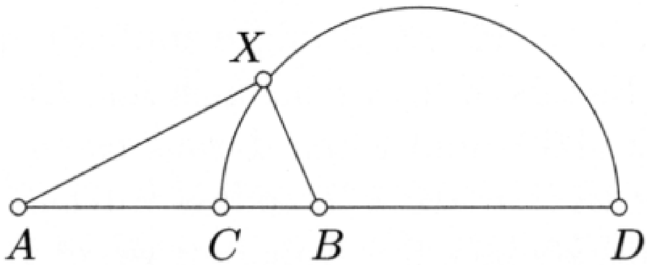
*Satz 3:*
In jedem Dreieck gilt: $2r \leq R$.

*Lemma:*
Die Winkelhalbierende teilt die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten, d.h. es gilt: $BW : WC = AB : AC$.
Dies gilt *auch* für die Winkelhalbierende eines Außenwinkels (s.u.).

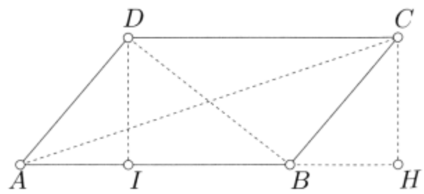


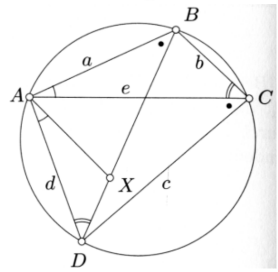

*Satz 4:* **Kreis des Apollonios**
Es sei $C$ ein innerer Punkt der Strecke $AB$; der Punkt $D$ aber liege zwar auf der Geraden $AB$, jedoch nicht zwischen $A$ und $B$.
Wenn es sich nun ergibt, dass $AC : CB = AD : DB$, dann ist der geometrische Ort aller Punkte $X$ mit $AX : XB = AC : CB$ der Kreis mit Durchmesser $CD$.




*Satz 5:* **Parallelogrammformel**
Im Parallelogramm ist die Summe der Quadrate über den vier Seiten genauso groß wie die Summe der Quadrate über den Diagonalen.



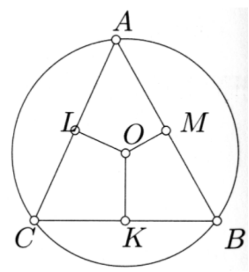

*Satz 6:* **Satz des Ptolemaios**
Im Sehnenviereck ist die Summe der Produkte gegenüberliegenden Seiten so groß wie das Produkt der Diagnoalen: $ac + bd = ef$ .




*Satz 7:* **Satz des Brahmagupta**
Im Sehnenviereck gilt: $F = \sqrt{(s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c) \cdot (s-d)}$ .

*Satz 8:* **Satz von Carnot**

(1) Ist $O$ der Umkreismittelpunkt und $K$, $L$, $M$ die Seitenmitten im spitzwinkligen Dreieck $ABC$, so gilt: $KO + LO + MO = R + r$ .
(2) Ist das Dreieck $ABC$ bei $C$ rechtwinklig, so fallen $M$ und $O$ zusammen und es gilt: $KO + LO = R + r$ .
(3) Ist das Dreieck $ABC$ bei $C$ stumpfwinklig, so gilt: $KO + LO - MO = R + r$ .

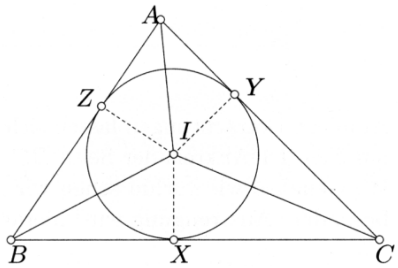


# Geometrie: III. Strecken – Übungen

AG, SWA

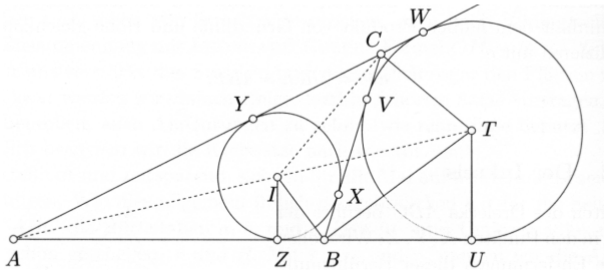
***Übung 1:***

Der Abstand des Eckpunktes $A$ zu den auf den Seiten $AB$, $AC$ liegenden Inkreisberührpunkten beträgt $s - a$.
Der Flächeninhalt des Dreiecks ist das Produkt aus dem Inkreisradius und dem halben Umfang: $F = r \cdot s$.




***Übung 2:***

Der Ankreis der Seite $BC$ berührt diese Seite in einem Punkt $V$, der von ihrem Mittelpunkt genausoweit absteht wie der Inkreisberührpunkt $X$.
Ferner berührt er die beiden anderen Seiten $AB$, $AC$ in zwei Punkten $U$, $W$, die von $A$ beide die Entfernung $s$ haben.

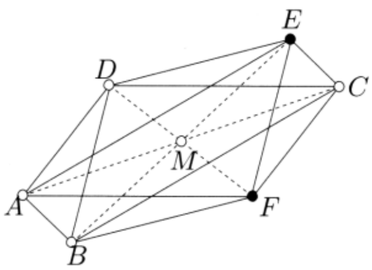



Für den Radius gelten die Gleichungen: $F = (s - a) \cdot r_a$ und $(s - b) \cdot (s - c) = r \cdot r_a$.

***Übung 3:***

Es sei $ABCD$ ein beliebiges Viereck und mit seinen Eckpunkten $A$, $B$, $C$ werde das Parallelogramm $ABCE$ konstruiert; sodann übersteigt die Summe der Quadrate über den Seiten die Summe der Quadrate über den Diagonalen um $DE^2$, es gilt also:

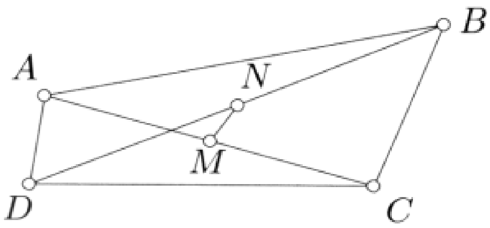
$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + DE^2 .$$




***Übung 4:***

Wenn $M$, $N$ die Mittelpunkte der Diagonalen $AC$, $BD$ eines beliebigen Vierecks $ABCD$ sind, dann gilt:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4 \cdot MN^2 .$$




***Übung 5:***

Der Punkt $P$ liege auf der Seite $BC$ des Dreiecks $ABC$ und zur Abkürzung sei $m = BP$, $n = PC$, $p = AP$. Dann gilt: $bbm + ccn = a \cdot (pp + mn)$ (Stewart-Formel).

***Übung 6:***

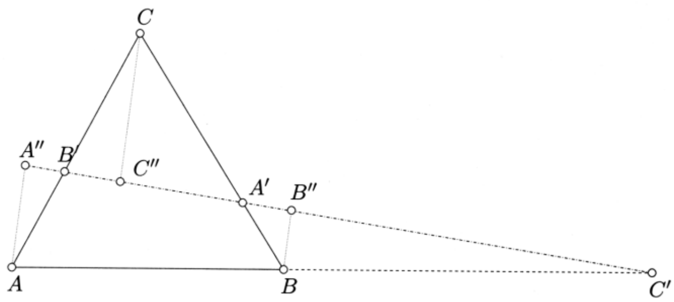
Beweise, dass im Sehnenviereck gilt: $|a - c| + |b - d| \geq 2 \cdot |e - f|$.

# Geometrie: IV. Menelaos und Ceva – Sätze

AG, SWA

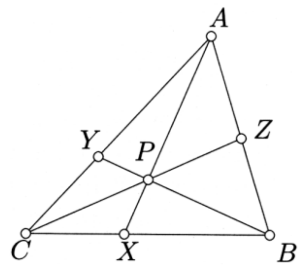
*Satz 1:* **Satz von Menelaos**
Schneidet eine Gerade die (eventuell verlängerten) Seiten *AB*, *BC*, *CA* eines Dreiecks ABC in den Punkten *C´*, *A´*, *B´*, so gilt:

$$\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{CA'}{A'B}\cdot\frac{BC'}{C'A} = -1\,.$$

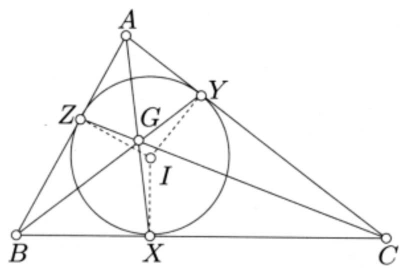



*Satz 2:* **Satz von Ceva**
Es sei *P* ein Punkt im Innern oder auch außerhalb des Dreiecks *ABC*; *AP* treffe *BC* in *X* und analog seien *Y*, *Z* die Schnittpunkte von *BP*, *CP* mit *CA*, *AB*; alsdann wird:

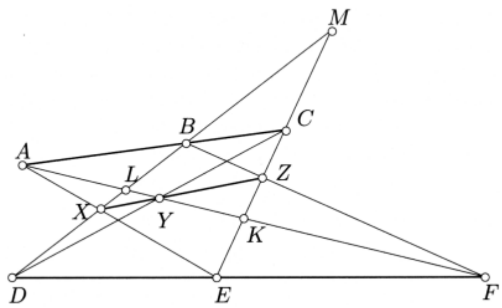
$$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA} = +1\,.$$



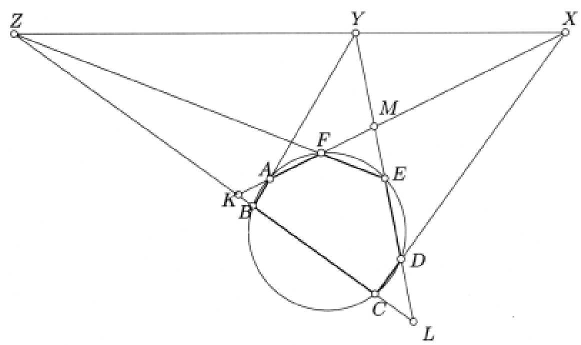

*Satz 3:* **Satz von Gergonne**
Berührt der Inkreis des Dreiecks *ABC* die Seiten *BC*, *CA*, *AB* in den Punkten *X*, *Y*, *Z*, so schneiden sich *AX*, *BY*, *CZ* in einem Punkt (dem sog. Gergonne-Punkt).




*Satz 4:* **Satz von Pappos**
Sind auf zwei beliebigen Geraden jeweils drei Punkte gewählt, sagen wir auf der einen *A*, *B*, *C* und auf der anderen *D*, *E*, *F*, so liegen der Schnittpunkt *X* von *AE* mit *BD*, der Schnittpunkt *Y* von *AF* mit *CD* und der Schnittpunkt *Z* von *BF* mit *CE* auf einer gemeinsamen Geraden.



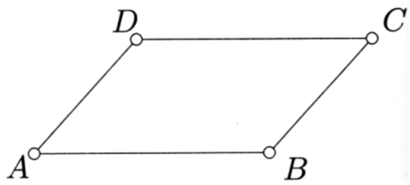

*Satz 5:* **Satz von Pascal**
Die drei Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten eines Sehnensechsecks liegen – unabhängig davon, ob es überschlagen oder konvex ist – auf einer gemeinsamen Geraden.



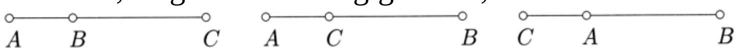
# Geometrie: IV. Menelaos und Ceva – Übungen

AG, SWA

*Orientierte Strecken:*
Als orientierte Strecke oder **Vektor** verstehen wir eine Strecke mit einer vorgegebenen Richtung, d.h. es gilt nunmehr:
$BA = -AB$ (oder formal korrekt: $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$).
(1) In einem Parallelogramm gilt dann z.B.: $AB + CD = 0$.

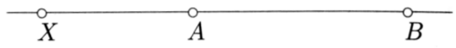



(2) Liegen die Punkte $A$, $B$ und $C$ auf einer Geraden, so gilt – unabhängig davon, welcher davon der mittlere ist – stets: $AB + BC = AC$.




Dies ermöglicht Aussagen *unabhängig* von der Lage der Punkte.

*Teilverhältnisse:*
Liegt ein beweglicher Punkt $X$ auf der Geraden $AB$, so gilt für die Teilverhältnisse:

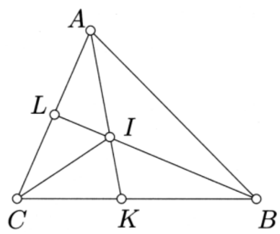



$-1 < \frac{AX}{XB} < 0$ für $A$ zwischen $X$ und $B$

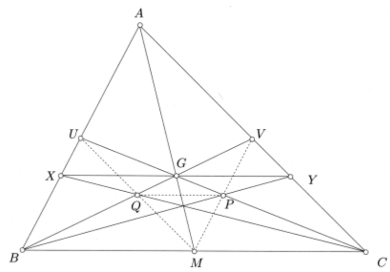
$0 < \frac{AX}{XB} < +\infty$ für $X$ zwischen $A$ und $B$

$-\infty < \frac{AX}{XB} < -1$ für $B$ zwischen $A$ und $X$

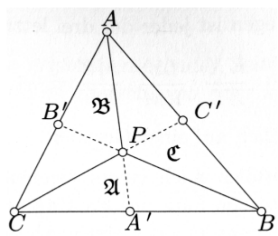
***Übung 1:***
In welchem Verhältnis teilt der Inkreismittelpunkt $I$ die Innenwinkelhalbierende $AK$ des Dreiecks $ABC$?




***Übung 2:***
Es sei $G$ der Schwerpunkt des Dreiecks $ABC$ und $M$ der Mittelpunkt von $BC$. Die Punkte $X$ und $Y$ werden so auf $AB$, $AC$ bestimmt, dass $X$, $G$, $Y$ auf einer gemeinsamen, zu $BC$ parallelen Geraden liegen. Der Schnittpunkt von $XC$ mit $GB$ heiße $Q$, der von $YB$ mit $GC$ heiße $P$.
Beweise, dass die Dreiecke $MPQ$, $ABC$ ähnlich sind.




***Übung 3:***
Im Innern eines Dreiecks $ABC$ ist ein Punkt $P$ gewählt. Die Strahlen $AP$, $BP$, $CP$ schneiden die Begrenzung des Dreiecks in den Punkten $A'$, $B'$, $C'$.
Setzt man $u = \frac{AP}{PA'}$, $v = \frac{BP}{PB'}$, $w = \frac{CP}{PC'}$, so gilt: $2 + u + v + w = uvw$.




***Übung 4:***
Ein Kreis berühre die Seiten $BR$, $RA$ des Dreiecks $ABR$ in den Punkten $C$, $D$ und schneide $AB$ in $K$ und $L$. Es sei $M$ der Schnittpunkt von $RL$ mit $CD$ und $P$ der Schnittpunkt von $AC$ mit $BD$.
Beweise, dass $K$, $P$ und $M$ kollinear sind.