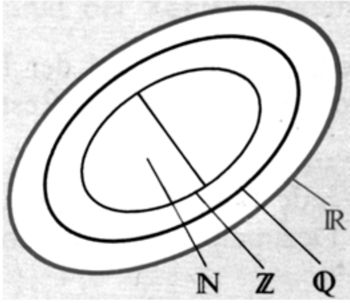
Komplexe Zahlen
(Seite 1)

(i) Motivation:



$x + 5 = 3$ hat in **N** keine Lösung => Erweiterung zu **Z** => $x = -2$

$3 \cdot x = 2$ hat in **Z** keine Lösung => Erweiterung zu **Q** => $x = {}^2/_3$

$x^2 = 2$ hat in **Q** keine Lösung => Erweiterung zu **R** => $x = \pm\sqrt{2}$

$x^2 + 1 = 0$ hat in **R** keine Lösung => Erweiterung zu **C** (**Menge der komplexen Zahlen**) => $x = \pm i$ mit $i^2 := -1$ (oder $i = \sqrt{-1}$)

Imaginäre Einheit:

Die Zahl i mit $i^2 = -1$ heißt **imaginäre Einheit** (Euler 1777).

Folgerungen:

$i \cdot 0 = 0 \cdot i = 0$ $\quad i + 0 = i$ $\quad {}^i/_i = 1$

$i^2 = -1$ $\quad i^3 = i^2 \cdot i = -i$ $\quad i^4 = i^2 \cdot i^2 = +1$ $\quad i^5 = i$ $\quad \Rightarrow i^{4n+r} = (i^4)^n \cdot i^r = 1^n \cdot i^r = i^r$ für $r = 0, 1, 2, 3$

Beispiele:

$(3i)^2 = -9$ $\quad (2i)^4 = 16$ $\quad {}^4/_i = -4i$ $\quad \sqrt{-16} = 4i$ $\quad i^{234} = i^{4 \cdot 58 + 2} = i^2 = -1$

(ii) Komplexe Zahlen:

Komplexe Zahl:

Die Zahl $z = a + bi$ heißt **komplexe Zahl** mit dem *Realteil* a = Re(z) und dem *Imaginärteil* b = Im(z).

Der **Betrag** einer komplexen Zahl berechnet sich durch: $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Die Zahl $\overline{z} = a - bi$ nennt man **konjugiert komplexe Zahl** der Zahl $z = a + bi$ mit $|\overline{z}| = |z|$.

Beispiel:

$z = 3 + 4i \Rightarrow \overline{z} = 3 - 4i$ mit $|z| = 5$ $\qquad z = -4 - 12i \Rightarrow \overline{z} = -4 + 12i$ mit $|z| = 4 \cdot \sqrt{10}$

Beachte:

$a = 0 \Leftrightarrow$ rein imaginäre Zahl; $b = 0 \Leftrightarrow$ reelle Zahl.

$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$ <u>und</u> $b_1 = b_2$!

$z = \overline{z} \Leftrightarrow b = 0$!

$\overline{(\overline{z})} = z$

(iii) Rechnen mit komplexen Zahlen:

Beispiele:

$(9 + 2i) + (7 + 4i) = 16 + 6i$ $(9 + 2i) \cdot (7 + 4i) = 55 + 50i$ $(5 + 12i) \cdot (5 - 12i) = 169$

$(2 + 3i)^2 = -5 + 12i$ $\frac{3-2i}{4+5i} = \frac{(3-2i)\cdot(4-5i)}{(4+5i)\cdot(4-5i)} = \frac{12-15i-8i+10i^2}{16-25i^2} = \frac{2-23i}{41} = \frac{2}{41} - \frac{23i}{41}$

Rechenregeln:

Addition / Subtraktion: $(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)\cdot i$

Multiplikation: $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)\cdot i$, da $i^2 = -1$.

Division: $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)\cdot i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\cdot i$.

Potenzieren: $(a + bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2ab\cdot i$ (höhere Potenzen: Pascalsches Dreieck!).

Folgerungen:

$\overline{u+v} = \overline{u} + \overline{v}$ und $\overline{u\cdot v} = \overline{u}\cdot\overline{v}$.

$z\cdot\overline{z} = z^2$, d.h. $|z| = \sqrt{z\cdot\overline{z}}$ => „4. Binomische Formel“: $(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2$

$i^{-1} = i^3 = -i$, denn: $ii^{-1} = 1 = i^4 = ii^3$ $z^{-1} = {}^{1}/_{z} = {}^{z^*}/_{z\cdot z^*} = {}^{z^*}/_{|z|^2}$

Wurzeln:

Die Wurzel aus der komplexen Zahl $z^2 = a + bi$ ergibt sich aus:

$$z_{1,2} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right) \text{ für } b > 0;\; z_{3,4} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - i\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right) \text{ für } b < 0$$

(da x und y verschiedene Vorzeichen haben müssen bei b<0 wegen 2xy = b).

Herleitung:

Gesucht ist Zahl $z = x + yi$ mit $(x + yi)^2 = a + bi$, also $(x^2 - y^2) + 2xy\cdot i = a + bi$.

$$\Rightarrow \left|\begin{matrix} x^2-y^2=a \\ 2xy=b \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix} (x^2-y^2)^2=a^2 \\ 4x^2y^2=b^2 \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix} x^4-2x^2y^2+y^4=a^2 \\ 4x^2y^2=b^2 \end{matrix}\right| \oplus$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{matrix} x^2-y^2=a \\ x^4+2x^2y^2+y^4=a^2+b^2 \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix} x^2-y^2=a \\ (x^2+y^2)^2=a^2+b^2 \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix} x^2-y^2=a \\ x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2} \end{matrix}\right|$$

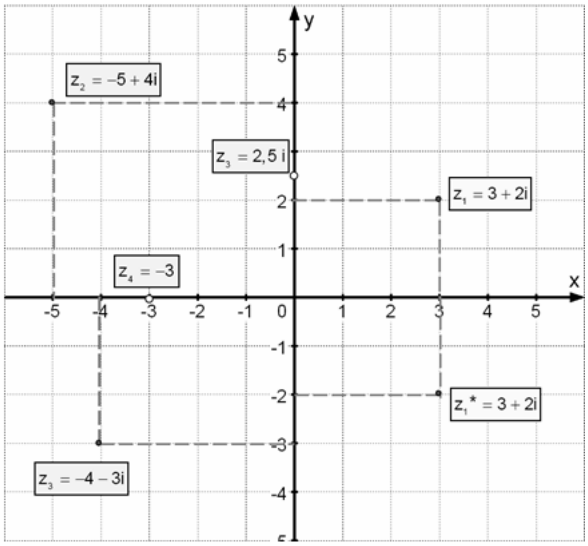
$$\Rightarrow x^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2};\; y^2 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}$$

(iv) Die Gaußsche Zahlenebene (komplexe Ebene):

Komplexe Ebene: „Gaußsche Zahlenebene“

Die 1. Achse entspricht dem Realteil, die 2. Achse dem Imaginärteil, d.h.: **x = Re(z)**, **y = Im(z)**. Jeder komplexen Zahl z = a +b*i* entspricht somit der der Punkt P(a|b).

Die rein imaginären Zahlen liegen auf der y-Achse, die reellen auf der x-Achse. Eine komplexe Zahl liegt stets x-achsensymmetrisch zu ihrer konjugiert komplexen Zahl.



Problem:

Komplexe Zahlen lassen sich nicht der Größe nach ordnen (d.h. „$z_1 < z_2$“ ergibt keinen Sinn!). Stattdessen verwendet man oftmals den ***Betrag*** einer komplexen Zahl, der ihren **Abstand vom Ursprung** angibt. Zahlen mit demselben Betrag liegen auf einem Kreis um den Ursprung.

(v) Vektoren; Polarkoordinaten:

Vektoren: Die Zahl z = a + b*i* lässt sich auch als Ortsvektor darstellen, d.h. $\vec{z} = \overrightarrow{OZ} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

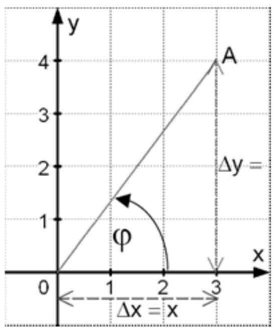
Vorteil: Die Addition/Subtraktion lässt sich durch Vektoren leicht ausführen (man addiert/subtrahiert stets gleichartige Komponenten).

Weitere Darstellung eines Punktes:

Den im Bild dargestellten Punkt A(3|4) kann man auch beschreiben durch:

$|z| = \sqrt{3^3 + 4^2}$ und $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \approx 51{,}13°$.

D.h. jede komplexe Zahl lässt sich nun auch in *Polarkoordinaten* darstellen, es gilt folglich: $A(3\,|\,4) <=> A[5\,|\,51{,}13°]$.



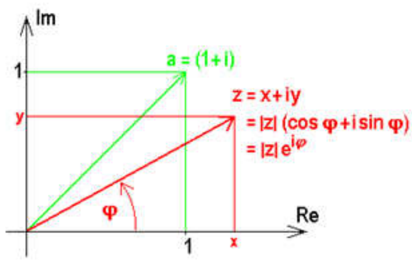
Auch die Grundrechenarten lassen sich mit Polarkoordinaten leicht darstellen (Additionstheoreme!!!).

Polarkoordinaten:

Jede komplexe Zahl $z = a + bi$ lässt sich sowohl in kartesischen Koordinaten $(a\,|\,b)$ als auch in Polarkoordinaten $\left[\,|z|\,|\varphi\right]$ angeben mit:

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\varphi = \frac{a}{|z|}$ und $\sin\varphi = \frac{b}{|z|}$, also:

$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) = |z| \cdot e^{i\varphi}$.



Exkurs: Taylor-Reihen-Entwicklung

Sinusfunktion: $\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$

Kosinusfunktion: $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$

Exponentialfunktion: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + ...$

=> $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$

(vi) Lösen von Gleichungen:

Beachte: Ist z Lösung einer Gleichung, so ist auch immer $\bar{z}$ Lösung derselben Gleichung!

Beispiele:

(1) Bestimme die Lösungen der Gleichung $x^2 - 4x + 8 = 0$!

=> $x_{1,2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 8} = 2 \pm \sqrt{-4} = 2 \pm \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2 \pm 2i$ => L = {2±2i}

(2) Bestimme die Nullstellen des Polynoms $x^4 - x^3 + x^2 + 2$!

Durch „Raten“: 1 + i ist Lösung, denn:

$$(1+i)^4 - (1+i)^3 + (1+i)^2 + 2 = 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 - (1 + 3i + 3i^2 + i^3) + 1 + 2i + i^2 + 2 = 0$$

=> Wenn 1 + i Lösung ist, dann ist auch 1 – i eine Lösung.

$$(x-(1+i)) \cdot (x-(1-i)) = ((x-1)-i) \cdot ((x-1)+i) = (x-1)^2 - i^2 = x^2 - 2x + 2$$

=> $(x^4 - x^3 + x^2 + 2) : (x^2 - 2x + 2) = x^2 + x + 1$ (Polynomdivision)

=> $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{-1} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$

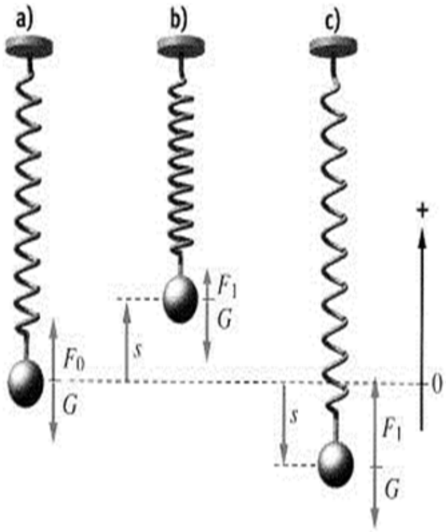
=> $L = \left\{ 1 \pm i; -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \right\}$

Fundamentalsatz der Algebra:

Ein Polynom n-ten Grades hat in **C** immer genau n Nullstellen.

(vii) Anwendungen:

(1) Schwingungen:



Bei einem Federpendel wirkt die Kraft F = m·a, die von der Rückstellkraft F = – D·s geliefert wird. Es gilt somit zu jedem Zeitpunkt: m·a(t) = – D·s(t) bzw. a(t) = – $^D/_m$·s(t).

Da a(t) = $\ddot{s}$(t) (Herleitung z.B. über Graph), erhält man:

$\ddot{s}$(t) = – $^D/_m$·s(t) (**Differentialgleichung**).

Lösungen dieser Gleichung sind:

$s(t)=\hat{s}\cdot\sin(\omega t+\varphi)$, $s(t)=\hat{s}\cdot\cos(\omega t+\varphi)$ bzw.

$s(t)=\hat{s}\cdot\left(\cos(\omega t+\varphi)+i\cdot\sin(\omega t+\varphi)\right)$ oder $s(t)=\hat{s}\cdot e^{i\omega t+\varphi}$.

Vorteil von komplexen Zahlen im Vergleich zu Reellen:

Bei der Dämpfung lautet die Differentialgleichung: m·a(t) = – k·v(t) – D·s(t).

Durch Verwendung der komplexen Zahlen kann man statt *sin* und *cos* die Exponentialfunktion verwenden, was gerade Produkte und deren Ableitungen stark vereinfacht!

(2) Mandelbrot-Mengen („Apfelmännchen“):

Mandelbrot-Menge ist die Menge aller komplexen Zahlen c, für welche der Betrag der rekursiv definierten Folge komplexer Zahlen $z_{n+1}=z_n{}^2+c$; $z_0=0$ beschränkt bleibt. Punkte der Folge werden schwarz dargestellt; manchmal gibt die Farbe eines Punktes auch den Grad der Divergenz an.

Da die Berechnung sehr aufwendig ist, begnügt man sich oft mit folgendem: Ist das 20. Folgenglied kleiner als 2, so gehört der Punkt zur Menge, ansonsten gehört er nicht dazu.

Man beachte die Selbstähnlichkeit der entstehenden Struktur!

Anwendung: Computer-Darstellungen von Wolken, Bergen, Küsten, …