X. Matrizen
(Seite 1)

Kl. 12, SWA

Addieren und Vervielfachen von Matrizen:

Definition: **m×n-Matrix**

Eine Zahlentabelle wie rechts mit $a_{ij} \in \Re$ für alle vorkommenden i, j heißt **Matrix A** mit m Zeilen und n Spalten, kurz m×n-Matrix oder Matrix vom Typ m×n.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},\ m, n \in \mathbb{N}$$

Man schreibt kurz: **A** = (a_{ij}); i = 1, …, m; j = 1, …, n.

Eine Matrix **A** heißt **quadratisch**, wenn sie ebenso viele Zeilen wie Spalten hat, d.h. wenn gilt: m = n.

Untersucht man mehrere Matrizen, so verwendet man entsprechend die Schreibweisen **B** = (b_{kl}), **C** = (c_{ik}) usw.

Anmerkung:

Das Kürzel „a_{ij}“ bezeichnet das Element in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte.

Merke: <u>**Z**</u>eilen <u>**z**</u>uerst, <u>**S**</u>palten <u>**s**</u>päter!

Definition: **Vervielfachen von Matrizen**

Eine Matrix **A** wird mit einer reellen Zahl r **vervielfacht** (multipliziert), indem man jedes Element von **A** mit r multipliziert.

Man schreibt kurz: r·**A** = r·(a_{ij}) = $(r \cdot a_{ij})$.

r·**A** heißt das r-fache der Matrix **A**.

$$4 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot(-2) & 4\cdot 1 \\ 4\cdot(-1) & 4\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$$

Definition: **Addieren von Matrizen**

Zwei Matrizen **B** und **C** vom selben Typ werden **addiert**, indem man die in den Matrizen an entsprechender Stelle stehenden Elemente addiert.

Man schreibt kurz: **B** + **C** = $(b_{ij}) + (c_{ij}) = (b_{ij} + c_{ij})$.

B + **C** heißt die Summe der Matrizen **B** und **C**.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & 1-5 \\ -1+4 & 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Beachte: <u>Beide</u> Matrizen müssen vom Typ m×n sein!

Definitionen:

(1) Vertauscht man bei einer m×n-Matrix **A** die i-te Zeile mit der i-ten Spalte (für alle i), so erhält man eine n×m-Matrix, die sog. **transponierte** Matrix $\mathbf{A}^T$.

(2) Eine quadratische Matrix **A**, für die gilt: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, heißt **symmetrisch**.

Multiplizieren von Matrizen:

Definition: **Multiplikation von Matrizen**

Gegeben sind eine $\ell \times m$-Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$ und eine $m \times n$-Matrix $\mathbf{B} = (b_{jk})$.
Dann ist das Produkt der beiden Matrizen **A** und **B** als eine $\ell \times n$-Matrix $\mathbf{C} = (c_{ik})$ definiert, deren Elemente man so erhält:
Jedes Element c_{ik} von $\mathbf{C} = (c_{ik})$ berechnet man als Skalarprodukt des i-ten Zeilenvektors der Matrix **A** mit dem k-ten Spaltenvektor der Matrix **B**.
Man schreibt: $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 2+2\cdot 1+3\cdot 1 & 5\cdot 2+2\cdot 4+3\cdot 1 \\ 0\cdot 2+4\cdot 1+3\cdot 1 & 0\cdot 2+4\cdot 4+3\cdot 1 \\ 2\cdot 2+1\cdot 1+3\cdot 1 & 2\cdot 2+1\cdot 4+3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 21 \\ 7 & 19 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$$

Beachte:

(1) Für das Produkt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ muss gelten: *Anzahl der Spalten von **A** = Anzahl der Zeilen von **B***!

(2) Es gilt: $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$!

(3) $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$!!!

Definition:

Eine Matrix **A** heißt **idempotent**, falls gilt: $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$. Eine Matrix **A** heißt **nilpotent**, falls $A^n = 0$.

Rechengesetze für die Multiplikation von Matrizen:

Satz: **Gesetze für die Multiplikation von Matrizen**

(a) Für Matrizen **A**, **B**, **C** gilt stets:

Assoziativgesetz: $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$

Distributivgesetz: $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ $\quad \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$

skalare Multiplikation: $(r \cdot \mathbf{A}) \cdot (s \cdot \mathbf{B}) = rs \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ mit $r,s \in \Re$,

falls die Matrizenterme überhaupt definiert sind.

(b) Im Allgemeinen gilt das Kommutativgesetz nicht, d.h. im Allgemeinen ist $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, falls die beiden Produkte überhaupt definiert sind.

Definition: **Einheitsmatrix**

Eine quadratische $n \times n$-Matrix, welche auf der Diagonalen die Einträge „1“ und sonst nur „0“ hat, nennt man **Einheitsmatrix**.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{E_n} = \mathbf{A}$ bzw. $\mathbf{E_n} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}$ (d.h. E_n ist das neutrale Element der Matrizen-Multiplikation).

Inverse Matrizen:

Definition: **Inverse Matrizen**

Gibt es zur quadratischen n×n-Matrix **A** eine quadratische n×n-Matrix **B** mit **A**·**B** = $\mathbf{E_n}$ und **B**·**A** = $\mathbf{E_n}$, so heißen **A** und **B** **invers zueinander**.

Man nennt auch **B** **Inverse** zu **A** und schreibt: **B** = $\mathbf{A}^{-1}$.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$$

Beachte:

Bei Zahlen ist *nur* die 0 nicht invertierbar, bei Matrizen gibt es viele nicht invertierbare Matrizen (Kriterium später)!

Lineare Gleichungssysteme und Matrizen:

Satz:

Besitzt die n×n-Matrix **A** eine zu sich inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$, so ist für einen beliebigen Vektor $\vec{b}$ das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A}\cdot\vec{x}=\vec{b}$ eindeutig lösbar; es besitzt die Lösung: $\vec{x}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\vec{b}$.

$$\left|\begin{array}{rrcr}2x_1+ & x_2+6x_3 & = & -1\\ x_1 & +3x_3 & = & 1\\ & -2x_2+x_3 & = & 2\end{array}\right| \Rightarrow \begin{pmatrix}2 & 1 & 6\\ 1 & 0 & 3\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 2\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\vec{b}=\begin{pmatrix}-6 & 13 & -3\\ 1 & -2 & 0\\ 2 & -4 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\ -3\\ -4\end{pmatrix}.$$

Determinanten:

Determinanten:

Die Funktion det(**A**) ordnet jeder Matrix **A** eine Zahl, nämlich det(**A**), folgendermaßen zu:

$$\det\left(a_{11}\right)=a_{11} \qquad \det\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$$

$$\det\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{array}{l}a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}\\ -a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13}-a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11}-a_{33}\cdot a_{21}\cdot a_{12}\end{array}$$ (Regel von Sarrus)

Gesetze:

(1) det(**A**·**B**) = det(**A**)·det(**B**) (2) det($\mathbf{A}^{-1}$) = $^1/_{\det(\mathbf{A})}$ (3) det($\mathbf{A}^{T}$) = det(**A**)

Determinanten und LGS:

A <u>**regulär**</u> ⇔ det(**A**) ≠ 0 ⇔ **A** invertierbar ⇔ $\mathbf{A}\cdot\vec{x}=\vec{b}$ eindeutig lösbar.

A <u>**singulär**</u> ⇔ det(**A**) = 0 ⇔ **A** <u>nicht</u> invertierbar ⇔ $\mathbf{A}\cdot\vec{x}=\vec{b}$ <u>nicht</u> eindeutig lösbar.